Cours de statistique des valeurs extrêmes

séries d'exercices

1) Enoncé des exercices corrigés

Exercice 1 (Constante d'une densité de probabilité)

On considère la fonction $f(x) = k \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$; $x \in \mathbb{R}$ où k est une constante.
Pour quelle valeur de k f définit-elle la densité de probabilité d'une v.a.c. X?

Exercice 2 (espérance de vie d'une population)

On suppose que la durée de vie d'un individu dans une population donnée est modélisée par une v.a.c. X dont la fonction densité de probabilité est donnée par:

$f(x) = \begin{cases} kx^2(100-x)^2 & si\ 0 \leq x \leq 100 \\ 0 & si\ non \end{cases}$ où k est une contante positive.

1. Déterminer la valeur de k.
2. Calculer la probabilité qu'un individu meure entre 60 ans et 70 ans.
3. Quelle est l'espérance de vie d'un individu dans cette population?

Exercice 3 (loi normale)

Dans une université on suppose que la variable "taille" (en centimètres) des étudiants suit une loi normale de moyenne 175 et de variance 64. Déterminer la proportion des étudiants

a) dont la taille excède 183 cm.

b) mesurant moins de 165 cm.

c) dont la taille est comprise entre 180 cm et 185 cm.

Exercice 4 (fonction caractéristique d'une exponentielle)

Soit X une variable aléatoire réelle dont la densité de probabilité est définie par : $f(x) = k.e^{-|x|}$; $x \in \mathbb{R}$ où k est une constante.

a) Déterminer la valeur de k.

b) Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ et la variance $\mathrm{V}(X)$.

c) Construire la fonction caractéristique de X.

Exercice 5 (densités marginales exponentielles)

Soit (X, Y) le couple de variables aléatoires réelles de fonction densité conjointe $f_{XY}(x,y) = 2e^{-x-y}$ avec $0 < x < y$

1. Déterminer les fonctions densités marginales f_X et f_Y.
2. Déterminer les fonctions de répartition marginales F_X et F_Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 6 (construction d'une copule)

Déterminer les distributions marginales F(x) et G(y) associées à la distribution H(x,y) puis construire la copule C(u,v) associée à H par le théorème de Sklar.

a) $H(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1} & sur\ [-1,1]\times[0,+\infty] \\ 1-e^{-y} & sur\ ]1,+\infty[\times[0,+\infty[\\ 0 & ailleurs. \end{cases}$

b) $H_\theta(x,y) = \exp\left\{-\left[(x+y) - \left(x^{-\theta}+y^{-\theta}\right)^{\frac{-1}{\theta}}\right]\right\} ; \theta \geq 1$

c) $H_\theta(x,y) = \left[1+e^{-x}+e^{-y}+(1-\theta)\,e^{-x-y}\right]^{-1} ; \theta\epsilon[-1,1]$

Exercice 7 (générateur archimédien)

En supposant que la fonction φ_θ suivant est un générateur archimédien construire la copule C_θ associée.

a) $\varphi_\theta(t) = \ln\left(\dfrac{1-\theta(1-t)}{t}\right)$

b) $\varphi_\theta(t) = -\ln\left(1-(1-t)^\theta\right)$ avec $\theta \geq [1,+\infty[$

c) $\varphi_\theta(t) = \frac{1}{\theta}\ln(1-\theta\ln t)$ avec $\theta \in]0,1]$

d) $\varphi_\theta(t) = \dfrac{1}{2\theta}\ln\left(2t^{-\theta}-1\right)$; $\theta \in]0,1]$.

e) $\varphi_\theta(t) = (t^{-1} - 1)^{-1}$ avec $\theta \in [1, +\infty[$

f) $\varphi_\theta(t) = \arcsin(1 - t^\theta)$ avec$\theta \in]0, 1]$

Exercice 8(copule de distribution extrême)

Construire la copule $C_\theta(u, v)$ associée à la distribution $G_\theta(x, y)$

1. $G_\theta(x_1, x_2) = exp\left\{ - \left[y_1 + y_2 - \frac{\theta y_1 y_2}{y_1 + y_2} \right] \right\}; \theta \in [0, 1]$

2. $G_{\theta,\delta}(x_1, x_2) = exp\left\{ (y_1 + y_2) - \dfrac{y_1 y_2 \left\{ y_1 (\theta + \delta) + y_2 (\theta + 2\delta) \right\}}{(y_1 + y_2)^2} \right\}; \theta \geq 0, \theta + 2\delta \leq 1, \theta + 3\delta \geq 0$

3. $G_{\theta,\delta}(x_1, x_2) = exp\left\{ - \left[y_1 + y_2 - \dfrac{\delta}{\left(y_1^\theta + y_2^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}} \right] \right\} \quad \theta \geq 0, \delta \in]0, 1]$

4. $G_{\theta,\delta}(x_1, x_2) = exp\left\{ -y_1 q^{1-\theta} - y_2 (1 - q)^{1-\delta} \right\}; 0 < \theta$ et $\delta < 1$. où $q = q(y_1, y_2, \theta, \delta)$ est la solution de l'équation : $(1 - \theta) y_1 (1 - q)^\delta - (1 - \delta) y_2 q^\theta = 0$

5. $G_{\theta,\delta}\left(x_1, x_2\right) = exp\left\{ - \left[y_1^{-\theta} + y_2^{-\theta} + \delta \left(y_1 y_2\right)^{\frac{-\theta}{2}} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}$

Exercice 9 (tau de Kendall)

1. Calculer le tau de Kendall τ_θ. associé à la copule C_θ *de Gumbel-Morgenstern* $C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1 - v)(1 - \mu)$

2. Déterminer en fonction de son générateur φ l'expression du tau de Kendall d'une copule archimédienne.

3. Déterminer en fonction de ses dérivées partielles $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ et $\frac{\partial C(u,v)}{\partial v}$ l'expression du tau de Kendall d'une copule singulière ou présentant à la fois une composante singulière et une composante absolument continue.

Exercice 10 (rho de Spearman)

Calculer le rho de Spearman associé à la copule C_θ dans les cas suivants :

1. $C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1 - v)(1 - \mu)$ copule de Gumbel-Morgensternon

2. $C_{\alpha,\beta} = \alpha M + (1 - \alpha - \beta)\Pi + \beta W$, membre de la famille de Fréchet

3. $C_{\alpha,\beta}(u, v) = \left\{ \begin{array}{l} u^{1-\alpha} v \ si \ u^\alpha \geq v^\beta \\ u v^{1-\beta} \ si \ u^\alpha \leq v^\beta \end{array} \right.$, famille de Marshall-Olkin

2) Correction des exercices

Exercice 1

$f(x) = k \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right); x \in \mathbb{R}$ *où k est une constante*

$\cdot \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \Longrightarrow k \geq 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}; \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) > 0$ donc il faut que k soit positive

$\cdot$ *Il suffit de vérifier la condition:* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right]^2 = k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(y)dx\right] dy = k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right) dx\right] dy.$*En faisant le changement de variables:* $x = r\ cos\theta$ *et* $y = r\ sin\theta$ *et utilisant la formule*

de changement de variables d'une intégrale on obtient:$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right]^2 = k^2 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{+\infty} r \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right.\right.$

$k^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) dr \ = k^2 \left[\theta\right]_0^{2\pi} \left[\exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right)\right]_0^{+\infty}$

$\Longrightarrow 2\pi k^2 = 1 \Longrightarrow k = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Par suite $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right); x \in \mathbb{R}$, *fonction densité de loi normale standard ou centrée réduite .*

Exercice 2

1) Valeur de k

$\cdot \left.\begin{array}{c} f \text{ densité} \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}; x^2(100-x)^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow k \geq 0$ donc k doit être positive.

$\cdot$ *Il reste à vérifier la condition:* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = k \int_0^{100} x^2(100-x)^2 dx = k \int_0^{100} (x^4 - 200x^3 + 10^4 x^2) dx = k \left[\frac{x^5}{5} - \frac{10^2}{2}x^4 + \frac{10^4}{3}x^3\right]_0^{100}$

$k\left[\frac{10^{10}}{5} - \frac{10^{10}}{2} + \frac{10^{10}}{3}\right] = \frac{k \times 10^9}{3}$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Longrightarrow \frac{k.10^9}{3} = 1$ *soit* $\boxed{k = 3 \times 10^{-9}}$ *et donc par suite on a :*

$$f(x) = \begin{cases} 3 \times 10^{-9} \times x^2(100-x)^2 & si\ 0 \leq x \leq 100 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

2) *La probabilité qu'un individu meure entre 60 ans et 70 ans est* $p = P\left(60 \leq X \leq 70\right) =$ $\int_{60}^{70} f(x)dx = k \int_{60}^{70} x^2(100-x)^2 dx = k \left[\frac{x^5}{5} - \frac{10^2}{2}x^4 + \frac{10^4}{3}x^3\right]_{60}^{70}$

$\Longrightarrow p = 3 \times 10^{-9} \times \left[\left(\frac{70^5}{5} - \frac{60^5}{5}\right) - \frac{10^2}{2}\left(70^4 - 60^4\right) + \frac{10^4}{3}\left(70^3 - 60^3\right)\right] = 0,1561$

Conclusion : *15,60% de la population meurre entre 60 et 70 ans.*

3) L'espérance de vie est $E\left(X\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$

$E\left(X\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=k\int_0^{100}x^3(100-x)^2dx=k\int_0^{100}\left[x^5-200x^4+10^4x^3\right]dx=$ $k\left[\frac{x^6}{6}-\frac{2.10^2}{5}x^5+\frac{10^4}{4}x^4\right]_0^{100}=k\left[\frac{10^{12}}{6}-\frac{2.10^{12}}{5}+\frac{10^{12}}{4}^4\right]$

$\Longrightarrow E\left(X\right)=k\times\frac{10^{11}}{6}$. Or $k=3\times10^{-9}$ par suite: $E\left(X\right)=3\times\frac{10^{11}}{6}\times10^{-9}=50$

Conclusion: *L'espérance de vie est de 50 ans dans cette population.*

Exercice 3

On note X la variable Taille, avec $X\rightsquigarrow N(175,64)$*. Soit* X^* *la variable centrée réduite associée à X, on a :* $X^*=\frac{X-175}{8}\rightsquigarrow N(0,1)$ *de fonction de répartition* Φ.

1. *On calcule la proportion des étudiants dont la taille dépasse 183 cm.* $p=P(X>183)=P\left(\frac{X-175}{8}>\frac{183-175}{8}\right)=P(X^*>1)=1-P(X^*\leq1)=1-\Phi\left(0,8413\right)=0,1587=15,87\%$. *Conclusion : On a 15,87% des étudiants de cette université mesurent plus de 183 cm ou on peut estimer que, dans cette université, 476 (15,87% de 3000) étudiants environ mesurent plus de 183 cm.*

2. *La proportion p' des étudiants dont la taille est inférieure à 165 cm est* $p'=P(X<165)=P\left(\frac{X-175}{8}<\frac{165-175}{8}\right)=p(X^*<-1.25)=\Phi(-1,25)=1-\Phi\left(1,25\right)\Longrightarrow p'=P(X<165=1-0.8943=0.1057$. *Environ 11% des étudiants de cette université mesurent moins de 165 cm soit 317 étudiants (10,56% de 3000) environ.*

3. $p"=P(180<X<185)=P\left(\frac{180-175}{8}<X^*<\frac{185-175}{8}\right)=P(0,63<X^*<1,25)=\Phi\left(1,25\right)-\Phi\left(0,63\right)=$*0,8944 – 0,7357 = 0,1587. Environ 16% des étudiants mesurent entre 180 cm et 185 cm. On peut estimer à environ 476 (15,87% de 3000) le nombre d'étudiants de cette université mesurant entre 180 cm et 185 cm.*

Exercice 4

$\cdot\ f(x)=k.e^{-|x|}$; $x\in\mathbb{R}$ *où k est une constante* $\Longrightarrow f(x)=k.e^{-|x|}=\begin{cases}k.e^{x} & si\ x\leq0\\ k.e^{-x} & si\ x\geq0\end{cases}$

a) $\cdot$ $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1\Longrightarrow1=\int_{-\infty}^{0}k.e^xdx+\int_0^{+\infty}k.e^{-x}dx=2k\Longrightarrow1$ *soit* $k=\frac{1}{2}$

b) · $E(X) = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{2} e^{x} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{2} e^{-x} dx = 0$ *($x\ f(x)$ est une fonction impaire à intégrer sur un domaine fermé et centrée);* $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{2} e^{x} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{2} e^{-x} = 2$

c) *Soit $\varphi_X(t)$ la fonction caractéristique de X. On a:* $\varphi_X(t) = E(e^{itx}) = \frac{1}{1+t^2}$ *(intégration deux fois par parties)*

Exercice 5

Dans cet exercice, il faut bien prendre garde au fait que la densité jointe fX, Y (x, y) du couple (X, Y) dépend de l'ordre des variables. En effet, il y a la condition $x <$ y qui est imposée dans la définition.

1) Pour $x \leq 0$, la densité jointe est nulle, donc celle de X aussi. Prenons $x > 0$ et calculons la densité marginale de X : $f_X(x) = \int_{x}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy = 2\int_{x}^{+\infty} e^{-x-y}dy = 2e^{-x}\int_{x}^{+\infty} e^{-y}dy = 2e^{-2x}, x > 0$. *C'est la loi exponentielle de paramètre 2.*

De même on a : $f_X(x) = \int_{0}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x-y}dx = 2e^{-y}(1-e^{-y}), y \geq 0.$

2°) Les fonctions de répartition.

Pour tout réel $x > 0$ on a : $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f_X(t)dt = 1 - 2e^{-2x}$

De même $F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_0^y f_y(s)ds = (1-e^{-y})^2$.

3°) Déterminons la probabilité conjointe $P(X \leq x; Y \leq y) = \int_0^x \int_x^y f_{XY}(s,t)dsdt$

Comme le suggère l'énoncé, il faut tenir compte des deux cas où $x \leq y$ et $x > y$. Cette distinction provient du fait qu'il y ait un ordre imposé dans les variables de la densité jointe. Commençons par supposer que s t, puisque x est compris entre 0 et t, on peut séparer le premier signe intégral en deux parties

• *Pour $x \leq y$. on vérifie que :* $P(X \leq x; Y \leq y) = \int_0^y \int_x^y 2e^{-x-y}dsdt = (1-e^{-y})^2$

• *Pour $x > y$ on établit que :* $P(X \leq x; Y \leq y) = \int_0^x \int_x^y 2e^{-x-y}dsdt = (1-e^{-x})(1-2e^{-y}+e^{-x}$

On a $F_X(x)\ F_Y(y) \neq F_{XY}(x,y)$ donc les deux variables ne sont pas indépendantes.

Exercice 6

1. *Pour la distribution* $H(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1} & \textit{sur } [-1,1]\times[0,+\infty] \\ 1-e^{-y} & \textit{sur }]1,+\infty[\times[0,+\infty[\\ 0 & \textit{ailleurs.} \end{cases}$ *. On vérifie que* $F^{-1}(u) = 2u-1$ *et* $G^{-1}(u) = -\ln(1-v)$. *Par conséquent la copule associée est telle que:* $C(u,v) = \dfrac{uv}{u+v-uv}; \forall u, v \in I$.

2. *Pour tout réel* $\theta \geq 1$, *la distribution bivariée* $H_\theta(x,y) = \exp\left\{-\left[(x+y) - \left(x^{-\theta} + y^{-\theta}\right)^{\frac{-1}{\theta}}\right]\right\}$ *définie sur* $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ *admet pour marges:* $F(x) = G(x) = \exp(-x); \forall x \in [0,+\infty[$ *soit* $\forall u \in [0,1[,\ F^{-1}(u) = G^{-1}(u) = -\ln u$. *La copule associée est telle que :* $C_\theta(u,v) = uv\exp\left\{-\left[(-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta}\right]^{\frac{-1}{\theta}}\right\}; \theta \geq 1;$ *c'est la copule de Galambos.*

3. *Pour tout réel* $\theta \epsilon [0,1]$, $H_\theta(x,y) = \left[1 + e^{-x} + e^{-y} + (1-\theta)\, e^{-x-y}\right]^{-1}$, *la copule associée est :* $C_\theta(u,v) = u+v-1+(1-u)(1-v)\exp\left\{-\theta\ln(1-u) + (-\ln v)^{-\theta\frac{-1}{\theta}}\right\}; \theta \geq 1;$

Exercice 7

a) $\varphi_\theta(t) = \ln\left(\dfrac{1-\theta(1-t)}{t}\right) \longrightarrow C_\theta(u,v) = \dfrac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)}; \theta \in [-1,1]$

b) $\varphi_\theta(t) = -\ln\left(1-(1-t)^\theta\right)$ avec $\theta \geq [1,+\infty[\longrightarrow C_\theta(u,v) = 1-\left[(1-u)^\theta + (1-v)^\theta - (1-u)^\theta\right.$

c) $\varphi_\theta(t) = \frac{1}{\theta}\ln(1-\theta\ln t)$ avec $\theta \in]0,1] \longrightarrow C_\theta(u,v) = uv\exp(-\theta\ln u\ln v)$

d) $\varphi_\theta(t) = \dfrac{1}{2\theta}\ln\left(2t^{-\theta}-1\right) \longrightarrow C_\theta(u,v) = \dfrac{uv}{\left[1+(1-u^\theta)(1-v^\theta)\right]^{\frac{1}{\theta}}}; \theta \in]0,1]$.

e) $\varphi_\theta(t) = (t^{-1}-1)^{-1}$ avec $\theta \in [1,+\infty[\longrightarrow C_\theta(u,v) = \left(1+\left[\left(u^{-1}-1\right)^\theta + \left(v^{-1}-1\right)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right)^{-1}$

f) $\varphi_\theta(t) = \arcsin(1-t^\theta)$ avec$\theta \in]0,1] \longrightarrow C_\theta(u,v) = \left(1-(1-u^\theta)\sqrt{1-(1-v^\theta)} - (1-v^\theta)\sqrt{1-\right.$

Exercice 8

Copule C_θ *associée à la distribution* $G_\theta(x,y)$

1. $G_\theta(x_1,x_2) = exp\left\{-\left[y_1+y_2-\frac{\theta y_1y_2}{y_1+y_2}\right]\right\}; \theta \in [0,1]$;*copule :* $C_\theta(u,v) = uvexp\left\{\dfrac{\theta\tilde{u}\tilde{v}}{\tilde{u}+\tilde{v}}\right\}$

2. $G_{\theta,\delta}(x_1,x_2) = exp\left\{(y_1+y_2) - \dfrac{y_1y_2\left\{y_1(\theta+\delta) + y_2(\theta+2\delta)\right\}}{(y_1+y_2)^2}\right\}$ *avec* $\theta \geq 0, \theta + 2\delta \leq 1, \theta + 3\delta \geq 0$ *copule :* $C_\theta(u,v) = uvexp\left\{\tilde{u}\tilde{v}\dfrac{\tilde{u}(\theta+\delta) + \tilde{v}(2\delta+\theta)}{(\tilde{u}\tilde{v})^2}\right\}$.

3. $G_{\theta,\delta}(x_1,x_2) = exp\left\{-\left[y_1+y_2-\dfrac{\delta}{\left(y_1^\theta+y_2^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}}\right]\right\}$ *avec* $\theta \geq 0, \delta \in]0,1]$ *copule :* $C_{\theta,\delta}(u,v) = uvexp\left\{\frac{-\delta}{\left(\tilde{u}^{-\theta}+\tilde{v}^{-\theta}\right)^{-\frac{1}{\theta}}}\right\}$.

4. $G_{\theta,\delta}(x_1,x_2) = exp\left\{-y_1 q^{1-\theta} - y_2(1-q)^{1-\delta}\right\}$ *avec* $0 < \theta$; $\delta < 1$ *et* $q = q(y_1, y_2, \theta, \delta)$ *solution de* $(1-\theta)y_1(1-q)^{\delta} - (1-\delta)y_2 q^{\theta} = 0$ *copule :* $C_{\theta,\delta}(u,v) = \exp\left\{\tilde{u}q^{1-\theta} + \tilde{v}(1-q)^{1-\delta}\right\}$.

5. $G_{\theta,\delta}(x_1,x_2) = exp\left\{-\left[y_1^{-\theta} + y_2^{-\theta} + \delta\,(y_1 y_2)^{\frac{-\theta}{2}}\right]^{\frac{1}{\theta}}\right\}$ *copule* $C_{\theta,\delta}(u,v) = \exp\left\{-\left[\left(\tilde{u}^{\theta} + \tilde{v}^{\theta}\right) + \right.\right.$

Exercice 9

1*) Calculer le tau de Kendall* τ_θ. *associé à la copule* C_θ *de Gumbel-Morgenstern* $C_\theta(u,v) = uv + \theta uv(1-v)(1-\mu)$

Solution $\tau c = \dfrac{2\theta}{9}$.*En effet :* $\forall u,v \in I, C_\theta(u,v) = uv + \theta(u-u^2)(v-v^2) \Longrightarrow$
$\dfrac{\partial^2 C_\theta(u,v)}{\partial u \partial v} = 1 + \theta(1-2u)(1-2v)$

$\Longrightarrow C_\theta(u,v).\dfrac{\partial^2 C_\theta(u,v)}{\partial u \partial v} = \left[uv + \theta(u-u^2)(v-v^2)\right]\left[1 + \theta(1-2u)(1-2v)\right]$

$= v + \theta(u-u^2)(v-v^2) + \theta(1-2u)(1-2v) + \theta uv + \theta(u-3u^2+2u^3)(v-3v^2+2v^3$

d'où $\displaystyle\int\int_{I^2} C_\theta(u,v).\frac{\partial^2 C_\theta(u,v)}{\partial u \partial v} = \frac{1}{4} + \frac{\theta}{18} = \frac{2\theta}{9}.$

2) Solution $\tau c = 1 + 4\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}dt$

3) Solution $\tau c = 1 - 4\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial C(u,v)}{\partial u}.\frac{\partial C(u,v)}{\partial v} dudv$

Exercice10

i) $C_\theta(u,v) = uv + \theta uv(1-v)(1-\mu) \rightarrow \rho_\theta = \dfrac{\theta}{3}$ *(copule de Gumbel-Morgensternon)*

ii) $C_{\alpha,\beta} = \alpha M + (1-\alpha-\beta)\Pi + \beta W, \rightarrow \rho_{\alpha,\beta} = \alpha - \beta$ *(membre de la famille de Fréchet)*

1. *iii)* $C_{\alpha,\beta}(u,v) = \left\{\begin{array}{l} u^{1-\alpha}v \text{ si } u^\alpha \geq v^\beta \\ uv^{1-\beta} \text{ si } u^\alpha \leq v^\beta \end{array}\right. \rightarrow \rho_{\alpha,\beta} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\alpha\beta}{2\alpha - \alpha\beta + 2\beta}\right)$ *(famille de Marshall-Olkin)*

3) Séries d'exercices non corrigés

Exercice11

Soient X_1 *et* X_2 *deux variables aléatoires indépendantes de lois Gamma respectives* $\Gamma(s,\lambda)$ *et* $\Gamma(r,\lambda)$ *On pose* $Y_1 = X_1 + X_2$ *et* $Y_2 = \dfrac{X_1}{X_1+X_2}$.

a) *Déterminer la fonction densité conjointe du couple* (Y_1, Y_2).

b) *En déduire les lois marginales de* Y_1 *et* Y_2

c) *Les variables* Y_1 *et* Y_2 *sont-elles indépendantes?*

Exercice12

Soient X_1 *et* X_2 *deux variables aléatoires indépendantes de lois normales standard N(0,1). On pose* $Y_1 = X_1^2 + X_2^2$ *et* $Y_2 = \dfrac{X_1}{X_2}$.

a) *Déterminer la fonction densité conjointe du couple* (Y_1, Y_2).

b) *En déduire les lois marginales de* Y_1 *et* Y_2

c) *Les variables* Y_1 *et* Y_2 *sont-elles indépendantes?*

Exercice13

Soient X_1 *et* X_2 *deux variables aléatoires indépendantes de lois uniformes sur les intervalles* $[0,2]$ et $[-1,1]$. *On pose* $Y_1 = X_1 + X_2$ *et* $Y_2 = \dfrac{X_1}{X_2}$.

a) *Déterminer la fonction densité conjointe du couple* (Y_1, Y_2).

b) *En déduire les lois marginales de* Y_1 *et* Y_2

c) *Les variables* Y_1 *et* Y_2 *sont-elles indépendantes?*

Exercice14

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes de lois Gamma respectives* $\Gamma(a,1)$ *et* $\Gamma(b,1)$ *avec* $a > 0$ *et* $b > 0$.

a) *On pose* $L = \dfrac{X}{Y}$. *Montrer que L suit une loi beta de seconde espèce de paramètres a et b dont la fonction densité associée est* $f_L(z) = \dfrac{1}{B(a,b)} \dfrac{z^{a-1}}{(1+z)^{a+b}}, z > 0$ *avec* $B(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^{a+b}} = \int_0^{+\infty} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx.$

b) *On pose* $T = \dfrac{L}{1+L}$. *Montrer que T suit une loi beta de première espèce de paramètres a et b dont la fonction densité est* $f_T(t) = \dfrac{1}{B(a,b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1}, t \in [0,1]$.

Exercice 15

a) E*tablir que toute combinaison convexe des copules usuelles* W, Π, W *est aussi une copule i.e.si* α *et* β *sont des nombres réels dans* $[0,1]$ *tels que:* $\alpha + \beta \leq 1$, *alors la fonction* $C_{\alpha\beta}$ *définie de* I^2 *dans I par* $\forall u, v \in I; C_{\alpha,\beta}(u,v) = \alpha M(u,v) + (1-\alpha$ - $\beta)\Pi(u,v) + \beta W(u,v)$ *est une copule.*

b) *Application: Déterminer la copule définie par :*$\forall \theta \in [-1,1]$; $\forall u, v \in I$ $C_\theta(u,v) = \frac{\theta^2(1+\theta)}{2} M(u,v) + (1-\theta^2)\Pi(u,v) + \frac{\theta^2(1-\theta)}{2} W(u,v)$. *C'est la copule de Mardia.*